

Come indicato nella definizione (3.6.6), la correlazione incrociata è una funzione della variabile ritardo τ applicata a $x(t)$; pertanto, non è corretto considerarla un segnale temporale. Possiamo però calcolare la trasformata di Fourier di $R_{yx}(\tau)$ rispetto alla variabile ritardo τ , ricavando così la nuova funzione:

$$\mathcal{E}_{yx}(f) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} R_{yx}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (3.6.7)$$

Chiariremo nel **Capitolo 4** il significato di questa funzione; per il momento è sufficiente ricavarne una proprietà semplice. A tal fine, introduciamo il segnale “ausiliario” $z(t) \triangleq x^*(-t)$, cosicché $z(\tau - t) = x^*(t - \tau)$. Alla luce di questa definizione, la (3.6.6) può essere riscritta come

$$R_{yx}(\tau) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) z(\tau - t) dt = y(\tau) \otimes z(\tau) \quad (3.6.8)$$

avendo richiamato la definizione di integrale di convoluzione (3.3.51). Se passiamo ora in ambito frequenziale, otteniamo

$$\mathcal{E}_{yx}(f) = Y(f) Z(f) \quad (3.6.9)$$

grazie al teorema della convoluzione. D'altronde, dalla definizione $z(t) \triangleq x^*(-t)$ segue $Z(f) = X^*(f)$; quindi, la (3.6.9) può essere riscritta come

$$\mathcal{E}_{yx}(f) = Y(f) X^*(f) \quad (3.6.10)$$

Quest'ultimo risultato permette di ricavare semplicemente la funzione $\mathcal{E}_{yx}(f)$ senza passare attraverso il calcolo esplicito della correlazione incrociata. Inoltre, suggerisce una procedura indiretta per calcolare la funzione di correlazione incrociata, ricavando prima la funzione $\mathcal{E}_{yx}(f)$ attraverso le trasformate dei segnali in gioco e, infine, calcolando la funzione $R_{yx}(\tau)$ come antitrasformata di $\mathcal{E}_{yx}(f)$.

Esempio 3.26

Calcoliamo la correlazione incrociata tra l'impulso radar e il suo eco della **Figura 3.16** (tralasciando per semplicità la presenza della frequenza portante f_0). L'impulso lanciato e l'eco sono, rispettivamente,

$$x(t) = \text{arect}\left(\frac{t - T/2}{T}\right), \quad y(t) = \text{brect}\left(\frac{t - T/2 - \tau_e}{T}\right) \quad (\text{E3.26.1})$$

dove $a, b > 0$ e $b < a$ perché l'eco ha un'ampiezza (molto) più piccola di quella del segnale trasmesso. Procediamo adesso con il calcolo nel dominio della frequenza ricordando la (E3.1.1):

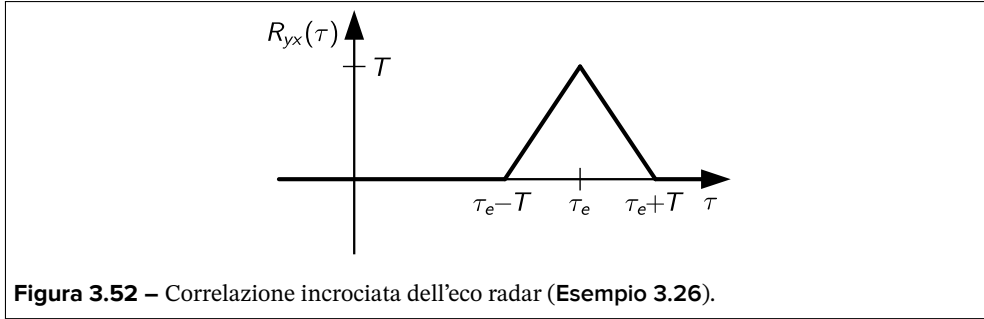
$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{yx}(f) &= Y(f) X^*(f) = \overset{b}{\downarrow} T \text{sinc}(fT) e^{-j2\pi f(T/2 + \tau_e)} \cdot \overset{a}{\downarrow} T \text{sinc}(fT) e^{j2\pi f(T/2)} \\ &= \overset{ab}{\uparrow} T^2 \text{sinc}^2(fT) e^{-j2\pi f\tau_e} \end{aligned} \quad (\text{E3.26.2})$$

Sfruttando l'antitrasformata notevole (**E3.13.3**), torniamo nel dominio del ritardo e troviamo immediatamente

$$R_{yx}(\tau) = T \left(1 - \frac{|\tau - \tau_e|}{T} \right) \text{rect} \left(\frac{\tau - \tau_e}{2T} \right) \quad (\text{E3.26.3})$$

cioè l'impulso triangolare traslato rappresentata nella **Figura 3.52**.

Notiamo che, come ci aspettavamo, la cross-correlazione presenta il "picco", cioè il valore massimo, in corrispondenza del valore di ritardo $\tau = \tau_e$, cioè del valore corretto del ritardo dell'eco radar.



Un caso particolare e (assai) notevole lo otteniamo calcolando la correlazione incrociata di un segnale $x(t)$ con *se stesso*, ottenendo la cosiddetta *funzione di autocorrelazione*

$$R_x(\tau) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) x^*(t - \tau) dt \quad (\text{3.6.11})$$

e in modo corrispondente, dalla (**3.6.10**),

$$\mathcal{E}_x(f) = |X(f)|^2 \quad (\text{3.6.12})$$

La funzione di autocorrelazione ha ancora un significato relativo alla similitudine, in particolare tra il segnale originario e una sua copia ritardata di τ . Notiamo, inoltre, che

$$R_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) x^*(t) dt = E_x \quad (\text{3.6.13})$$

Dunque, l'energia del segnale dato rappresenta il grado massimo di similitudine (che si manifesta correlando il segnale con se stesso inalterato). Possiamo dimostrare, come è logico, che

$$R_x(0) \geq |R_x(\tau)| \quad \forall \tau \quad (\text{3.6.14})$$

Dato un certo valore di τ , se troviamo un valore di autocorrelazione (in modulo) molto più piccolo di E_x , allora concludiamo che $x(t - \tau)$ è molto diverso da $x(t)$; in tal caso, il